

北京航空航天大学学报

2008.10

数控机床 NURBS 曲线插补运动误差分析与仿真

马方魁 郇 极

(北京航空航天大学机械工程及自动化学院 北京 100191)

摘 要: 介绍 NURBS 曲线插补算法, 指出实现 NURBS 曲线插补的关键是在插补周期内由进给步长求得曲线参数的增量。分析了数字伺服运动误差产生的原因, 建立伺服系统差分方程。在不同的进给速率和曲率半径条件下对工件轮廓误差进行仿真。仿真结果显示, 数控机床 NURBS 插补的轮廓误差与进给速度及给定曲线的曲率半径有关。在大的进给速率或小的曲率半径条件下, 伺服滞后所引起的轮廓误差是不可忽视的因素。

关键词: 数控机床; NURBS 插补; 运动误差; 仿真

中图分类号: TP391.9

文献标识码: A

Motion Error Analysis and Simulation of NURBS Curve Interpolation in NC Machine Tools

Ma Fangkui Huan Ji

(School of mechanical engineering & automation, Beihang University, Beijing 100191)

Abstract: The arithmetic of NURBS interpolation were introduced, it was the key for NURBS curve interpolation that the increment of curve parameter was gained according to the feed step in interpolation period. The causes of motion error were analysed in the numeric servo, the difference equations of servo system were built. The profile error of workpiece was simulated in different feed velocity and curvature radius. From the results, the profile error of NURBS interpolation is related to feed velocity and curvature radius in NC machine tools. The error arising out of servo delay should not be ignored on condition that there is a large feed velocity or small curvature radius.

Key words: CNC system NC machine tool; NURBS interpolation; motion error; simulation

0. 前言

在计算机辅助设计/制造 (CAD/CAM) 系统中, 一般采用参数样条来表示自由曲线、曲面。但在数控加工领域, 一般的 CNC 机床都不能直接接收样条信息, 也不能直接生成样条曲线轮廓。当在只具有直线和圆弧插补功能的数控系统上实现自由曲线、曲面加工时, 只能将其用微小直线或圆弧段来代替, 由此产生加工程序量过大等问题。特别是在高速加工时, 为控制轮廓精度, 需要数控系统具有大量程序段前瞻功能。随着计算机和数控技术的发展, 目前的一些先进数控系统 (如 FANUC16i/18i/160i、SIEMENS840D/840Di 等) 已经具备了 NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline, 非均匀有理 B 样条) 插补功能。NURBS 插补能大量压缩数控加工程序, 减少前瞻时所需要的程序段数量, 便于实现运动精度的控制。

目前, 在控制进给速度以提高加工精度方面, 许多学者进行了一系列的研究。例如, 彭芳瑜等[1] 考虑机床动力学和待加工曲线特性, 赵国勇等[2] 考虑插补时以短直线逼近实际曲线所引起的弓高误差、以及最大向心加速度的约束, 对 NURBS 插补的进给速度进行了自适

应控制。

对高速数控系统而言，伺服滞后引起的误差是影响加工精度的主要因素[3]。本文在介绍NURBS曲线插补的基础上，分析了数控机床运动误差产生的原因，建立了数字伺服系统仿真差分方程，针对不同的加工速度和不同的曲率半径进行轮廓误差的仿真，得出了仿真结果。

1. NURBS曲线插补

1.1. NURBS曲线定义

NURBS采用控制顶点 (d_i)、节点矢量(u_i)及权因子(ω_i)来定义自由曲线，一条 k 次 NURBS曲线可以表示为一段有理多项式的矢函数：

$$P(u) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i d_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,k}(u)} \quad (1)$$

其中， n 为控制顶点个数，参数 $u \in [u_k, u_{n+1}]$ ， $N_{i,k}(u)$ 是由节点矢量 $U=[u_0, u_1, \dots, u_{n+k+1}]$ 按照德布尔-考克斯递推公式：

$$\begin{cases} N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & \text{若 } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \\ N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(u) \\ \quad + \frac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) \\ \text{规定 } \frac{0}{0} = 0 \end{cases}$$

所定义的 k 次规范B样条基函数。

在数控加工中，NURBS次数一般取为3，并取两端节点的重复度为4。此时，定义一段NURBS曲线至少需要的控制顶点数为4。

1.2. NURBS曲线插补算法

将定义 NURBS 曲线的三个参数（控制顶点、权因子、节点矢量）和进给速度等作为 NC 程序指令，在 CNC 系统内部生成 NURBS 曲线，并驱动机床动作，加工出 NURBS 曲线的形状，即为 NURBS 曲线插补。

在参数空间，曲线轨迹参数 u 的插补计算可由二阶泰勒级数表示^[4-6]，即

$$u_{i+1} = u_i + T \dot{u}_i + (T^2 / 2) \ddot{u}_i + o(T^2) \quad (2)$$

式中， $\dot{u}_i = \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=t_i}$ ， $\ddot{u}_i = \left. \frac{d^2u}{dt^2} \right|_{t=t_i}$ ，插补周期 $T = t_{i+1} - t_i$ ， $i = 0, 1, 2, \dots$ 。

根据微分几何知识，曲线上第 i 个插补点的瞬时速度：

$$f(t_i) = \left. \frac{dP(u)}{dt} \right|_{u=u_i} = \left. \frac{dP(u)}{du} \right|_{u=u_i} * \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=t_i} \quad (3)$$

由于插补周期非常小，每个周期内刀具走过的距离也非常小，可近似认为其与该圆弧段的弧长相等，则瞬时速度 $f(t_i)$ 近似为机床进给速度。

以两轴（ x 、 y 轴）数控铣床为例，则：

$$\left. \frac{dP(u)}{du} \right|_{u=u_i} = \sqrt{\overset{\cdot}{x}_i^2 + \overset{\cdot}{y}_i^2} \quad (4)$$

由（2）-（4）式可得 NURBS 曲线插补的参数二阶递推公式：

$$u_{i+1} = u_i + \frac{\Delta L_i}{\sqrt{\overset{\cdot}{x}_i^2 + \overset{\cdot}{y}_i^2}} - \frac{\Delta L_i^2 (\overset{\cdot}{x}_i \overset{\cdot}{x}_i + \overset{\cdot}{y}_i \overset{\cdot}{y}_i)}{2(\overset{\cdot}{x}_i + \overset{\cdot}{y}_i)^2} \quad (5)$$

式中， $\overset{\cdot}{x}_i = \left. \frac{dx}{du} \right|_{u=u_i}$ ， $\overset{\cdot}{x}_i = \left. \frac{d^2x}{du^2} \right|_{u=u_i}$ ， $\overset{\cdot}{y}_i$ ， $\overset{\cdot}{y}_i$ 类似， $\Delta L_i = f(t_i) \cdot T$ ，为第 i 个

插补周期的进给步长。 ΔL_i 一般很小，当曲线曲率比较小时，(5)式可简化如下：

$$u_{i+1} = u_i + \frac{\Delta L_i}{\sqrt{\overset{\cdot}{x}_i^2 + \overset{\cdot}{y}_i^2}} \quad (6)$$

将 u_{i+1} 代入（1）式即可得新的插补点 P_{i+1} 。

由（5）式或（6）式可知，在给定 NURBS 曲线条件下，参数增量 $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$ 仅与进给步长 ΔL_i 有关。因此实现插补计算的关键是在各个插补周期内根据进给步长要求得到参数增量。

为提高插补计算的实时性，实际计算过程可采用文献[7]中的预处理方法，在插补准备中得到插补计算所需的相关参数，简化插补计算。

1.3. NURBS曲线插补前瞻

插补中的前瞻控制是指在高速加工中，为控制轮廓精度，需要数控系统在实时加工之前扫描待加工曲线，根据加工方向的变化提前获得进给速度的调节信息，在实时加工时，根据这些信息控制加工速度。

当使用微小直线或圆弧段来代替自由曲线加工时，为保证加工精度，往往需要前瞻大量的程序段，如图 1 所示。

对同一段自由曲线，采用 NURBS 插补，则达到同样加工精度需要前瞻的程序段数量将大大减少。如图 2 所示，仅仅需要前瞻两段 NURBS 曲线。

NURBS 曲线插补前瞻程序段数量的减少，将大大降低前瞻控制算法的复杂度，提高插补的精度、效率及稳定性。

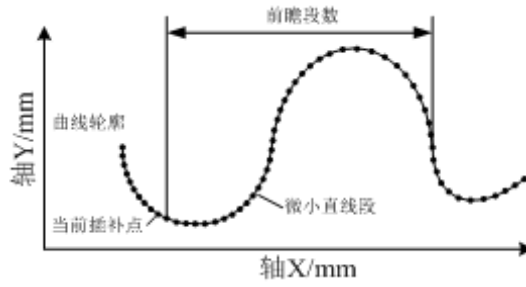


图 1 微小直线段前瞻

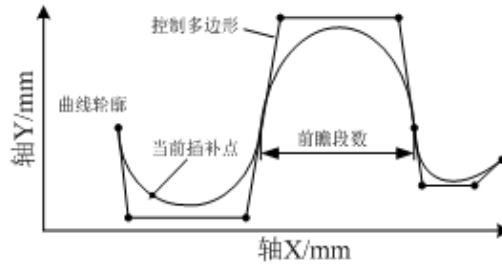


图 2 NURBS 插补前瞻

2. 数控机床运动误差分析

数控机床的进给运动由数字式随动伺服控制系统产生。伺服系统接收来自插补器的进给指令，经变换和放大后转化为机床工作台的位移，使工作台跟随指令运动。

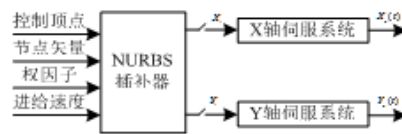


图 3 NURBS 插补轨迹控制原理

以两坐标数控铣床为例，带 NURBS 插补器的轨迹控制如图 3 所示。NC 程序定义了 NURBS 曲线的控制顶点、节点矢量、权因子及进给速度。NURBS 插补器根据这些指令，实时计算出曲线轮廓控制点的位置 $P_i(X_i, Y_i)$ ， X_i 和 Y_i 是时间序列函数，为伺服系统的指令值。伺服系统将其转换成机床的实际进给运动 $X_c(t)$ 、 $Y_c(t)$ 。

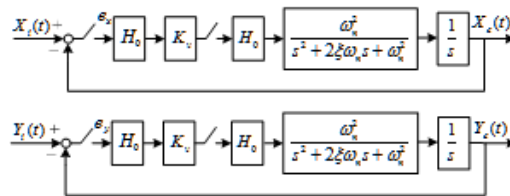


图 4 伺服系统的数学模型

高速数控机床一般采用交流同步电机或直线电机驱动。其伺服系统的数学模型可简化如图 4^[8-9]。其中，典型中、小型数控机床的控制参数为：频响 $\omega_n = 80 \sim 150s^{-1}$ ，阻尼系数 $\xi = 0.8 \sim 0.9$ ，位置增益 $K_v = 15 \sim 30s^{-1}$ 。

插补点 $X_i(t)$ 、 $Y_i(t)$ 通过运动误差 e_x 和 e_y 产生进给轴的进给运动 $X_c(t)$ 、 $Y_c(t)$ ，即

系统要运动，必须要有误差。取两轴的位置增益相等（ $K_{vx} = K_{vy} = K_v$ ），系统的运动误差与机床的进给速度相关：

$$e_x = \frac{\dot{X}}{K_v} \quad (6)$$

$$e_y = \frac{\dot{Y}}{K_v} \quad (7)$$

由（6）、（7）式，伺服系统的运动误差与伺服位置增益成反比、与进给速度成正比。增大 K_v 可以适当减少系统运动误差，但是 K_v 过大会降低系统的稳定性。

数控机床中，多轴同时运动进行轮廓加工时，各轴的运动误差将直接反映到所加工的曲线轮廓上，形成轮廓误差。轮廓误差指刀具实际位置与指令位置在指令轨迹法线方向上的偏差。如图 5 所示，在指令位置 p 处，轮廓误差 e 与运动误差 e_x 、 e_y 存在如下关系：

$$e = e_y \cos \theta - e_x \sin \theta$$

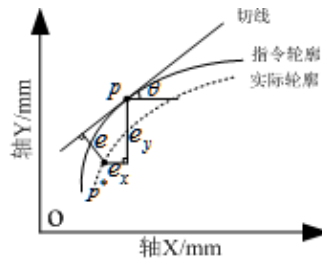


图 5 轮廓误差的定义

其中， p^* 为与 p 相对应的实际位置， θ 为 p 点处指令轮廓切线与 x 轴的夹角。

3. 伺服系统仿真模型

Z 变换分析法是分析线性离散系统的重要方法之一。应用 Z 变换和差分方程，可以建立伺服系统的仿真模型。

以 X 轴伺服系统为例，添加采样开关和零阶保持器进行虚拟简化后的数学模型如图 6 所示。

零阶保持器 H_0 的传递函数为 $\frac{1-e^{-Ts}}{s}$ 。设 $a = \zeta\omega_n$ ，

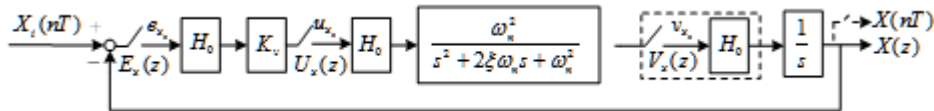


图 6 X 轴伺服系统数学模型

$$\omega = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}, \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)。$$

各环节的 Z 变换：

$$U_x(Z) = K_v E_x(Z)$$

$$V_x(Z) = \frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} U_x(Z)$$

$$X(Z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} V_x(Z)$$

其中：

$$b_1 = -2e^{-aT} \cos \omega T$$

$$b_2 = e^{-2aT}$$

$$a_1 = 1 + e^{-aT} \sec \varphi \cos(\omega T - \varphi) - 2e^{-aT} \cos(\omega T)$$

$$a_2 = e^{-2aT} - e^{-aT} \sec \varphi \cos(\omega T - \varphi)$$

对应的系统差分方程为：

$$e_{x_n} = X_{i_n} - X_n$$

$$u_{x_n} = K_v \cdot e_{x_n}$$

$$v_{x_n} = a_1 u_{x_{n-1}} + a_2 u_{x_{n-2}} - b_1 v_{x_{n-1}} - b_2 v_{x_{n-2}}$$

$$X_n = X_{n-1} + v_{x_{n-1}} T$$

其中， X_{i_n} ， X_n 分别为 X 轴第 n 个插补周期内的输入、输出坐标值，本文选择典型中

型数控机床伺服系统作为仿真实例，控制参数： $\omega_n = 120 s^{-1}$ ， $\xi = 0.8$ ，

$K_{vx} = K_{vy} = 20 s^{-1}$ ，插补周期： $T = 4ms$ 。

4. 仿真实例

4.1. 进给速率的影响

设被插补的三次 NURBS 曲线由下列参数定义：

控制顶点： $\{(0,0),(15,-20),(30,-20),(60,20),(75,20),(90,0)\}$

对应权因子： $(1,6,10,10,6,1)$

节点矢量： $(0,0,0,0,0.5,0.5,1,1,1,1)$

在不同进给速率下，曲线指令轮廓与实际轮廓如图 7 所示。轮廓误差曲线如图 8 所示，其中，横坐标 X 与纵坐标 e 分别为指令轨迹 X 坐标和轮廓误差坐标。

可以看出：进给速率越大，NURBS 曲线的轮廓误差 e 越大。在进给速率为 10m/min、20m/min 和 40m/min 时，曲线的最大轮廓误差分别达到了 2.638mm、8.051mm 和 19.94mm。

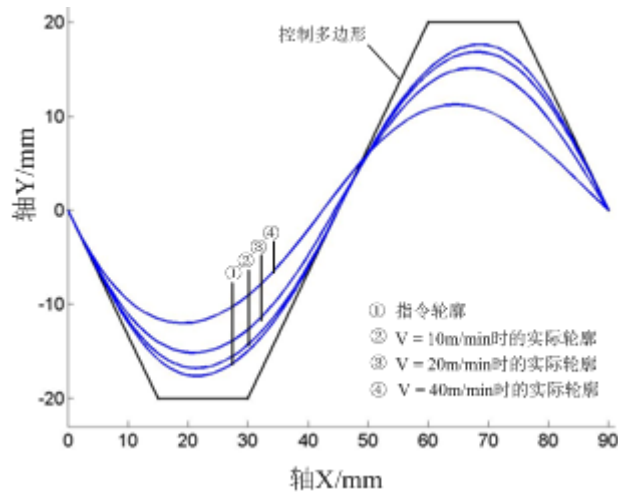


图 7 不同进给速率下曲线指令轨迹与轮廓轨迹

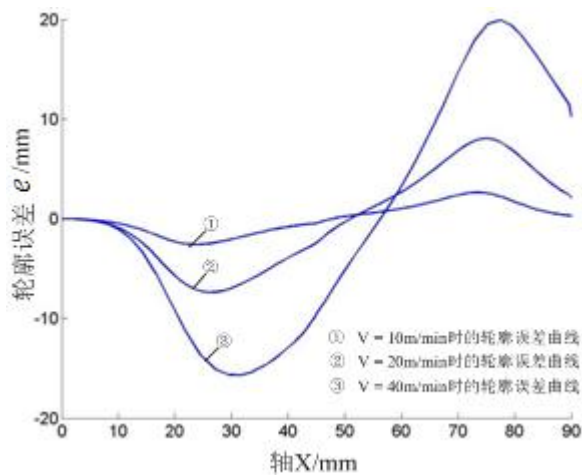


图 8 不同进给速率下曲线轮廓误差

4.2. 曲率半径的影响

设工件轮廓为整圆，选取进给速率为 20m/min，三次 NURBS 曲线由以下参数定义：

半径 $R=25\text{mm}$ 时，NURBS 曲线控制顶点为：

$(25,0), (25,50), (-25,50), (-25,0), (-25,-50), (25,-50), (25,0)$

半径 $R=50\text{mm}$ 时，NURBS 曲线控制顶点为：

$(50,0), (50,100), (-50,100), (-50,0), (-50,-100), (50,-100), (50,0)$

权因子： $(1,1/3,1/3,1/3, 1/3,1)$

节点矢量： $(0,0,0,0,0.5,0.5,0.5,1,1,1,1)$

不同曲率半径时的 NURBS 曲线指令轮廓与实际轮廓如图 9 所示。轮廓误差如图 10 所示，其中，横坐标 X 与纵坐标 e 分别为指令轨迹 X 坐标和轮廓误差坐标。

可以看出，在一定的进给速率下，NURBS 曲线曲率半径越大，轮廓误差越小。当进给速率为 20m/min 时，两种曲率半径条件下的最大轮廓误差分别为 5.806mm 和 3.227mm。

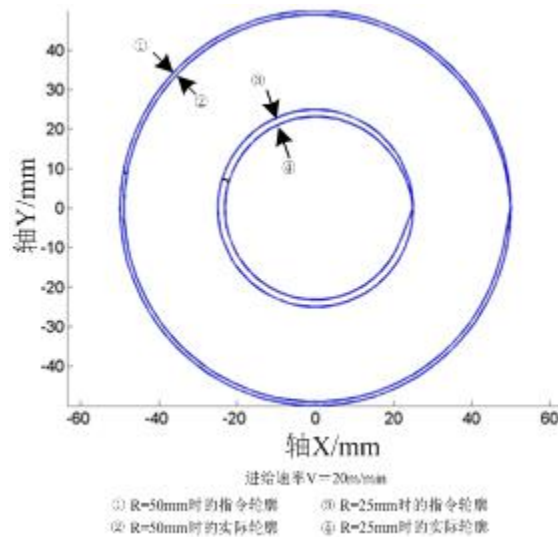


图 9 不同曲率半径下曲线指令轮廓与实际轮廓

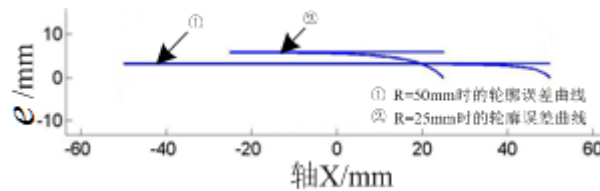


图 10 不同曲率半径下曲线轮廓误差廓

5. 结论

在介绍NURBS曲线插补算法基础上，分析了数控机床运动误差产生的原因，建立了数字伺服系统差分方程，并针对不同进给速率和不同曲率半径进行轮廓误差的仿真。仿真结果表明，数控机床NURBS曲线插补的轮廓误差随着进给速率的增大而增大，其最大误差发生在曲线曲率半径最小处。在高速加工或加工曲率半径小的工件时，该误差是不能被忽略的。为减少由运动控制引起的轮廓误差，必须加入前瞻控制，由NURBS曲线计算曲率半径，以控制进给速度，提前减速。

参 考 文 献

- [1] 彭芳瑜等. NURBS 曲线机床动力学特性自适应直接插补[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2005, 33(7): 80-83.
- [2] 赵国勇, 徐志祥, 赵福令. 高速高精度数控加工中 NURBS 曲线插补的研究[J]. 中国机械工程, 2006, 17(3): 291-294.
- [3] 北京发那科机电有限公司. 数控系统的伺服装置(二)[J]. 机械工人(冷加工), 2002 年第 8 期: 64-65.
- [4] 游有鹏, 王珉, 朱剑英. 参数曲线的自适应插补算法[J]. 南京航空航天大学学报, 2000, 32(6): 667-671.
- [5] Shpitalni M, Koren Y and Lo C C. Realtime curve interpolators[J]. Computer Aided Design, 1994, 26(11): 832-838.
- [6] Ning Liu, Gao Wang, Yanbiao Zou, et al. Research on a Real-time Interpolator DSPs Based for NURBS[C]. In: Sixth World Congress on Intelligent Intelligent Control and Automation, China, 2006, 2: 8206-8210.
- [7] 游有鹏, 王珉, 朱剑英. NURBS 曲线高速高精度加工的插补控制[J]. 计算机辅助设计

与图形学学报, 2001, 13(10): 943-947.

[8] Huan Ji, Bahnregelung zur Bahnerzeugung an numerisch gesteuerten Werkzeugmaschinen[M]. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1982.

[9] 李清新. 伺服系统与机床电气控制[M]. 清华大学出版社, 1998